УДК 517.977.5 – Оптимальное управление

Л.В. Локуциевский[1]

Оптимальный вероятностный поиск

Аннотация

Работа посвящена исследованию оптимального поиска неподвижного объекта, точное месторасположение которого неизвестно, однако известно его распределение с некоторой плотностью вероятности в n-мерном пространстве. Получено простое необходимое условие оптимальности траектории. Для поиска на сильно выпуклых множествах удается получить в явном виде дифференциальное уравнение, задающее оптимальную траекторию. В последней главе также доказана теорема существования оптимального поиска.

Ключевые слова

Оптимальный поиск, вероятностный поиск, траектория поиска, вихревая особенность, существование оптимальноого поиска.

[1]Автор благодарен Зеликину М.И. за постонное внимание к работе и множество ценных ценных советов.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу поиска подвижным игроком (назовем его P) неподвижного объекта (назовем его E)[2] в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Игрок P начинает движение из точки $o \in \mathbb{R}^n$ и продолжает движение со скоростью не превосходящей по модулю единицы.

Область видимости игрока P в момент времени t – это замкнутый шар радиуса 1 с центром в точке расположения игрока P. Поиск считается законченным в тот момент времени, когда точка E попадает в область видимости игрока P, т.е расстояние между точками P и E становится меньше или равным единицы. Игроку P не известно точное расположение точки E в пространстве, однако ему известна плотность вероятности $\psi(x)$ возможного расположения точки E в пространстве $\mathbb{R}^n$, и он выбирает стратегию движения, исходя из минимизации математического ожидания времени поиска. Функция плотности вероятности $\psi(\cdot)$ удовлетворяет следующим стандартным условиям:

1. В любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция $\psi(x)$ неотрицательна: $\psi(x) \geq 0$.
2. Функция $\psi(x)$ интегрируема в Лебеговском смысле (см. [1]), т.е. $\psi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$.
3. Интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 1.$$

Так как игроку P неизвестно точное расположение точки E, то, формально, игрок P в каждый момент времени $t \geq 0$ определяет направление своего движения в зависимости от того, нашел ли он

[2]Обозначения P и E выбраны по ассоциации с английскими persecutor и evador.

уже точку E или нет. Однако, в тот момент времени, когда игрок P найдет E поиск закончится. Следовательно, стратегией игрока P является некоторая траектория его движения при $t \in [0; +\infty)$, по которой он движется до тех пор, пока не найдет точку E.

Описанная ситуация в задаче оптимального вероятностного поиска кардинально отличается от ситуации в задачах поимки, в которых игрок E подвижен: в общем случае в таких задачах оптимальная стратегия не определяется одной единственной траекторией, а может, например, определяться случайным выбором какой-то траектории из бесконечного семейства траекторий (см., например, [2]).

Любая траектория в исследуемой задаче вероятностного поиска является Липшицевой кривой с константой Липшица не превосходящей единицу (см. [3]), т.е.

$$\gamma(0) = o \quad \text{и} \quad \gamma(t) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}([0; +\infty) \to \mathbb{R}^n)\ ^3. \tag{1}$$

Далеко не у всякой Липшицевой кривой определено понятие скорости, поэтому разумно обобщить понятие стратегии игрока P в задаче поиска, и рассмотреть в качестве возможных траекторий игрока P все Липшицевы траектории $\gamma(t)$ с константой Липшица равной 1 и начинающиеся в точке o.

С другой стороны, не всякая траектория $\gamma(t)$ с условиями (1) подходит для рассмотрения. В течении всего поиска игрок P должен гарантированно находить точку E, поэтому мы должны наложить на возможные траектории $\gamma(t)$ следующее условие: пусть

$$\Omega = \mathrm{Supp}\, \psi(x)$$

обозначает носитель функции $\psi(x)$ (см. [1]), тогда

Определение 1.1. *Траекторию $\gamma(t)$, удовлетворяющую (1), будем называть допустимой, если для почти всех $x \in \Omega$ найдется $t \geq 0$*

[3] $\mathrm{Lip}_{\leq 1}([0; +\infty) \to \mathbb{R}^n)$ обозначает пространство Липшицевых кривых с константой Липшица не превосходящей 1.

такой, что $|\gamma(t) - x| \le 1$. *То есть любая точка* $x \in \Omega$, *за исключением быть может множества меры 0, будет осмотрена игроком* P *при движении вдоль траектории* $\gamma(t)$ *при* $t \in [0; +\infty)$. *Таким образом, вероятность найти игрока* E *в течение всего времени движения равна единице. Множество всех допустимых траекторий мы будем обозначать* $S(\Omega, o)$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in \Omega$. Пусть $t(\gamma, x)$ – это тот момент времени, в который точка x в первый раз попадет в область видимости игрока P. Если игрок P в течении движения по $\gamma(t)$ осмотрит некоторую точку x, то $t(\gamma, x)$ определено корректно ввиду замкнутости области видимости игрока P – среди всех $t \ge 0$ таких, что $|\gamma(t) - x| \le 1$, естественно, существует минимальное:

$$t(\gamma, x) = \min\{t \ge 0 : |\gamma(t) - x| \le 1\}. \tag{2}$$

Допустимость траектории $\gamma(t)$ равносильна тому, что функция $t(\gamma, x)$ определена для почти всех точек $x \in \Omega$.

Как показал американский математик Роберт Соловай (см. [4]) в теоретико-множественной аксиоматике ZF без аксиомы выбора C любое множество действительных чисел является измеримым по Лебегу. Более того, добавление аксиомы счетного последовательного выбора DC также не достаточно для построения неизмеримых множеств на прямой. Поскольку в данной статье используется лишь аксиома DC, то мы можем не задумываться об измеримости различных множеств и функций.

Таким образом, функция $t(\gamma, x)$ измерима[4], и математическое ожидание $\tau_\psi(\gamma(\cdot))$ времени поиска при движении игрока P вдоль траектории $\gamma(\cdot)$ задается формулой:

[4]Нетрудно доказать полунепрерывность снизу функции $t(\gamma, x)$ по x и вывести отсюда ее измеримость, однако, как было сказано выше, этого не требуется.

$$\tau_\psi\big(\gamma(\cdot)\big) = \int\limits_\Omega t(\gamma, x)\psi(x)\,dx \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}. \tag{3}$$

Возможно при этом $\tau_\psi(\gamma(\cdot)) = +\infty$. Допустимую траекторию $\widehat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$ мы будем называть оптимальной, если функционал $\tau_\psi(\cdot)$ достигает глобального минимума по всем допустимым траекториям $\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o)$ на $\widehat{\gamma}(\cdot)$. Соответственно

$$\tau_\psi^{inf} = \tau_\psi(\widehat{\gamma}(\cdot)) = \inf_{\gamma \in S(\Omega, o)} \tau_\psi(\gamma(\cdot)).$$

Далее мы будем предполагать, что τ_ψ^{inf} конечно. Важно отметить, что оптимальная траектория определяется исключительно функцией $\psi(x)$.

2 Примеры

Рассмотрим несколько неожиданных примеров оптимальных траекторий. Примеры и приведенные факты в данном параграфе опираются на результаты, доказанные в [5] (так же см., например, [6]).

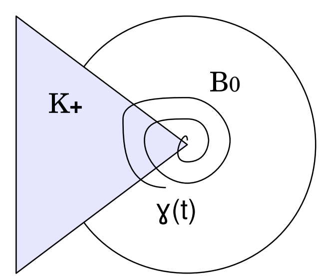

Рис. 1: Пример вихревой особенности при начале движения в двумерном случае.

Определение 2.1. *Будем говорить, что траектория $\gamma(t)$ имеет вихревую особенность при начале движения (см. рис. 1), если для любого полного выпуклого остроугольного кругового конуса K_+ с вершиной в точке o и сколь угодно малого $\Delta t > 0$ найдется момент времени $0 < t_1 < \Delta t$, такой что*

$$\gamma(t_1) \notin K_+.$$

В одномерном случае траектория с вихревой особенностью делает при начале движения счетное число переключений (под точкой переключения имеется ввиду точка, в которой не существует скорости $\dot{\gamma}(t)$ или $\dot{\gamma}(t) = 0$). В двумерном случае вихревая особенность – это, по-видимому, некая спираль конечной длины наподобие логарифмической, делающая счетное число оборотов вокруг нуля. В n-мерном случае игрок P, двигаясь по траектории с вихревой особенностью при начале движения обязан покинуть любой конус K_+ за любой сколь угодно малый начальный период времени.

Наличие вихревой особенности при начале движения означает как минимум отсутствие предела направления скорости $\dot{\gamma}(t)$ при $t \to +0$ [5].

Оказывается, что в достаточно большом семействе задач вероятностного поиска оптимальная траектория обладает вихревой особенностью:

Теорема 2.1. *Пусть B_0 – это шар радиуса 1 с центром в точке o, то есть B_0 – область видимости игрока P в начальный момент времени $t = 0$. Если $\psi(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to \partial B_0$ снаружи шара B_0, то оптимальная траектория $\widehat{\gamma}(t)$ имеет вихревую особенность при начале движения*[6].

Более того, в одномерном случае в оптимальных траекториях часто возникают особенности при окончании движения, в каком-то смысле двойственные вихревым при начале.

[5] На самом деле, если оптимальная траектория обладает вихревой особенностью при начале движения, то это означает куда более сильное вырождение, чем отсутствие направления скорости в $t = 0$.

[6] Доказательство существования оптимальной траектории см. далее.

Пример 2.1.

Если поиск происходит на отрезке $[-2;2]$, и функция плотности $\psi(x)$ устроена следующим образом:

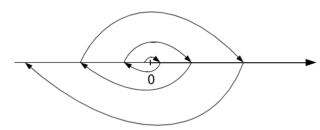

Рис. 2: Накопление переключений при начале движения.

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x-1|}}, \text{ если } 1 < |x| \le 2, \\ 0, \text{ если } |x| \le 1. \end{cases}$$

То есть $\psi(x) \to +\infty$ при $x \to 1+0$ и $x \to -1-0$. Тогда при оптимальном поиске за любой, сколь угодно малый начальный интервал времени $[0;\Delta t]$ скорость игрока P делает счетное число переключений с -1 на 1 и наоборот: $x_0 \simeq \frac{1}{3}$, $x_{-1} \simeq -0,00694$, $x_{-2} \simeq 0,00000301$, $\ldots$, $|x_{-n}| \simeq 16 \cdot 48^{-2^n}$, ... (нумерация точек переключения, естественно, идет от $-\infty$; см. рис. 2). Между описанными точками переключения игрок P движется с постоянной скоростью.

Пример 2.2.

В этом примере задача поиска тоже происходит на отрезке $[-2;2]$, но функция плотности $\psi(x)$ устроена по-другому:

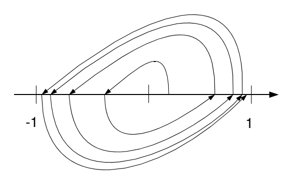

Рис. 3: Накопление переключений при окончании движения.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - |x-1|, \text{ если } 1 < |x| \le 2, \\ 0, \text{ если } |x| \le 1. \end{cases}$$

То есть $\psi(x)$ стремится к 0 при приближении x к обоим концам отрезка поиска. Тогда в этом случае в оптимальной траектории поиск априори может занять бесконечное время, несмотря на то, что математическое ожидание времени поиска $\tau_\psi(\widehat{\gamma}(\cdot))$ будет минимально. При

$t \to +\infty$ оптимальная траектория $\widehat{\gamma}(\cdot)$ имеет счетное количество точек переключения скорости с -1 на 1 и наоборот (см. рис. 3). Точки переключения накапливаются к концам отрезка $[-1;1]$ следующим образом: $x_0 \simeq \frac{2}{3}$, $x_1 \simeq -0,972$, $x_2 \simeq 0,999798$, ..., $|x_n| \simeq 1-4\cdot 12^{-2^n}$...

Пример 2.3.

В n-мерном случае также наблюдаются эффекты, описанные в двух предыдущих примерах. Это связано с тем, что в n-мерном случае нетрудно придумать задачу оптимального вероятностного поиска, которая была бы эквивалентна любой наперед заданной одномерной задаче поиска - для этого надо взять в качестве Ω трубку, а значения $\psi(x)$ в этой трубке задать по значениям в соответствующей одномерной задаче поиска.

3 Необходимые условия оптимальной траектории

Вероятностный поиск в одномерном пространстве $\mathbb{R}^1$ подробно изучен в [5]: построены оптимальные траектории поиска, изучено их поведение и асимптотика. Однако, уже даже в двумерном случае возникают серьезные трудности и стандартные методы поиска минимума не работают.

Основная проблема заключается в следующем: пространство допустимых траекторий $S(\Omega, o)$ не обладает ни линейной, ни выпуклой, ни гладкой структурой. Единственная естественная структура – это структура метрического пространства, индуцированная из объемлющего пространства $\mathrm{Lip}([0;+\infty) \to \mathbb{R}^n)$. Однако относительно данной структуры множество $S(\Omega, o)$ не является ни компактным, ни даже открытым или замкнутым в $\mathrm{Lip}([0;+\infty) \to \mathbb{R}^n)$. Более того ни одна

допустимая траектория с константой Липшица равной 1 не является внутренней точкой – при любой малой вариации скорость движения по этой траектории может превысить 1 (оптимальную траекторию следует искать как раз среди таких траекторий).

Попробуем подправить пространство $S(\Omega, o)$, так чтобы получить на нем какую-нибудь приемлемую линейную структуру, не потеряв при этом ни одной допустимой траектории, но сохранив минимум функционала $\tau_\psi(\cdot)$ среднего времени поиска – это позволит сформулировать необходимые условия оптимальной траектории в терминах дифференциального исчисления.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, тогда

Определение 3.1. *Расширенным пространством интегрируемых функций над Ω будем называть (Ω снабжено лебеговской мерой μ)*

$$\mathrm{L}_1^\infty(\Omega) = \big\{ f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},\ f(x) \text{ – } \textit{измерима} \big\}.$$

Также мы можем определить обобщение интеграла Лебега

$$\int_\Omega \cdot \ d\mu : \mathrm{L}_1^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

для $f(\cdot) \in \mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$ следующим образом: если $\mu\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\} > 0$, то положим $\int_\Omega f(x)\, d\mu = +\infty$; если же $\mu\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\} = 0$, то $\int_\Omega f(x)\, d\mu$ определим как обычный интеграл Лебега от $f(x)$ изменив предварительно значения $f(x)$ на множестве $\{x \in \Omega : f(x) = +\infty\}$ на любое конечное число.

Если пара функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ лежат в $\mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$, тогда $f_1(x) + f_2(x) \in \mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$, $f_1(x)f_2(x) \in \mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$ и $\lambda f_1(x) \in \mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (то есть $\mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$ – полуалгебра над $\mathbb{R}_+$).

Пусть $\gamma(t)$ – некоторая траектория, начинающаяся в точке o. Напомним, что $t(\gamma, x)$ – это первый момент времени, в который игрок P двигаясь по $\gamma(t)$ осмотрит точку x. Если $\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o)$, то функция $t(\gamma, x)$ (см. (2)) определена для почти всех $x \in \Omega$. Для произвольной же траектории

$$\gamma(\cdot) : [0 : +\infty) \to \mathbb{R}^n, \text{ и } \gamma(0) = o$$

положим $t(\gamma, x)$ равной $+\infty$, во всех точках $x \in \Omega$, которые игрок P не осмотрит. Тогда $t(\gamma, x) \in \mathrm{L}_1^\infty(\Omega)$. Таким образом, если некоторая траектория $\gamma(t)$ недопустима, то, автоматически, $\tau_\psi(\gamma(\cdot)) = +\infty$. То есть мы получили естественное продолжение функционала $\tau_\gamma(\cdot)$ на недопустимые Липшицевы кривые: функционал $\tau_\gamma(\cdot)$ теперь определен на всем единичном шаре $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$.

Определение 3.2. *Обозначим через* $\mathrm{Lip}(o, n)$ *– пространство всех Липшицевых кривых* $\gamma(\cdot)$*, начинающихся в точке* o*:*

$$\mathrm{Lip}(o, n) = \big\{\gamma(\cdot) \in C([0; +\infty) \to \mathbb{R}^n) : \gamma(0) = o \textit{ и } \|\gamma(\cdot)\|_{\mathrm{Lip}} < \infty\big\},$$

где Липшицева норма $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ *задается так:*

$$\|\gamma(\cdot)\|_{\mathrm{Lip}} = \min\big\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ \quad |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq \alpha|t_1 - t_2|\big\}\ ^7.$$

Итак, мы можем вложить множество $S(\Omega, o)$ в единичный шар $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ из нормированного пространства $\mathrm{Lip}(o, n)$ и продолжить естественным образом функционал $\tau_\psi(\cdot)$ так, что его минимум на множестве $S(\Omega, o)$ и на единичном шаре $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ будет достигаться на одной и той же траектории.

[7] Для кусочно гладких кривых норма $\|\gamma(\cdot)\|_{\mathrm{Lip}}$ – это максимум модуля скорости $|\dot{\gamma}(t)|$.

Более того, если $\gamma(t) \in \mathrm{Lip}(o,n)$ и $\|\gamma(t)\|_{\mathrm{Lip}} < 1$, то $\gamma(t)$ не оптимальна в шаре $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$ (движение по ней заведомо можно ускорить: $\gamma(\frac{t}{\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}}})$). Значит оптимальную траекторию (то есть минимум функционала $\tau_\psi(\cdot)$) надо искать на единичной сфере $\mathrm{Lip}_{=1}(o,n)$ в $\mathrm{Lip}(o,n)$.

Рассмотрим некоторую траекторию $\gamma(t) \in \mathrm{Lip}(o,n)$ $(\gamma \neq 0)$ и вместе с ней траекторию $\widetilde{\gamma}(\frac{t}{\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}}}) \in \mathrm{Lip}_{=1}(o,n)$. Тогда $\tau_\psi(\widetilde{\gamma}(\cdot)) = \|\gamma\|_{\mathrm{Lip}}\ \tau_\psi(\gamma(\cdot))$.

Это наблюдение позволяет ввести с использованием гомотетии новый функционал на всем пространстве $\mathrm{Lip}(o,n)$ без 0:

$$\widetilde{\tau}_\psi(\gamma(\cdot)) = \tau_\psi(\widetilde{\gamma}(\cdot)) = \|\gamma(\cdot)\|_{\mathrm{Lip}} \int_\Omega t(\gamma,x)\psi(x)\,dx.$$

Этот функционал является продолжением функционала $\tau_\psi(\cdot)$ со сферы $\mathrm{Lip}_{=1}(o,n)$ на пространство $\mathrm{Lip}(o,n) \setminus \{0\}$, позволяющим рассматривать произвольные вариации оптимальной траектории. При этом минимум нового функционала $\widetilde{\tau}_\psi(\cdot)$ на $\mathrm{Lip}(o,n)$ и старого $\tau_\psi(\cdot)$ на $\mathrm{Lip}_{=1}(o,n) \setminus \{0\}$ совпадают и достигаются на одних и тех же траекториях (с точностью до линейного ускорения параметризации этой траектории). Точнее: если $\widehat{\gamma}(t) \in \mathrm{Lip}(o,n) \setminus \{0\}$ доставляет минимум функционала $\widetilde{\tau}_\psi(\cdot)$, то и целый луч траекторий $\gamma(\lambda t)$, $\lambda > 0$ так же является минимумом функционала $\widetilde{\tau}_\psi(\cdot)$.

Определение 3.3. *Мы будем говорить, что $\widehat{\gamma}(t)$ является оптимальной, если она доставляет минимум функционала $\widetilde{\tau}_\psi(\cdot)$ на $\mathrm{Lip}(o,n) \setminus \{0\}$ и при этом $\widehat{\gamma} \in \mathrm{Lip}_{=1}(o,n)$.*

Теперь мы можем воспользоваться стандартными средствами поиска минимума:

Теорема 3.1. *Если $\widehat{\gamma}(t)$ – оптимальная траектория, то нижняя односторонняя производная по Гато неотрицательна по любому направлению $h(\cdot) \in \mathrm{Lip}(o,n)$:*

$$\widetilde{\tau}_{\psi}{}'_{\underline{\Gamma_+}}(\widehat{\gamma})[h] = \underline{\lim_{\lambda\to+0}}\frac{\widetilde{\tau}_\psi(\widehat{\gamma}+\lambda h)-\widetilde{\tau}_\psi(\widehat{\gamma})}{\lambda} \geq 0.$$

Это достаточно трудно проверяемое условие. Изучим простейшие свойства траекторий из $\mathrm{Lip}(o,n)$ с тем, чтобы вычленить класс траекторий, на котором бы условие из теоремы (3.1) легко проверялось:

Определение 3.4. *Обозначим через* $\Omega(\gamma,t) = \{x \in \Omega : t(\gamma,x) = t\}$.

Лемма 3.1. *Пусть* $\gamma(\cdot) \in \mathrm{Lip}(o,n)$ *и для некоторого* $t_0 > 0$ *существует левая производная* $\dot{\gamma}(t_0-0)$. *Тогда для всех* $x \in \Omega(\gamma,t_0)$ *выполнены следующие соотношения* ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ *– стандартное скалярное произведение в* $\mathbb{R}^n$):

$$|\gamma(t_0)-x| = 1;$$
$$\langle x-\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0-0)\rangle \geq 0.$$

Доказательство. Первое равенство очевидно и не зависит от наличия или отсутствия левой производной $\dot{\gamma}(t_0-0)$. Докажем второе от противного: если для какого-то $x \in \Omega(\gamma,t_0))$ выполнено обратное неравенство, то для всех $\Delta t > 0$

$$|x-\gamma(t_0-\Delta t)|^2 = 1 + 2\langle x-\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0-0))\rangle\Delta t + \bar{o}(\Delta t),$$

и мы получаем противоречие с тем, что t_0 – это первый момент осмотра точки x. □

Таким образом, $\Omega(\gamma,t)$ при $t>0$ лежит в соответствующей полусфере с центром в $\gamma(t)$ по направлению $\dot{\gamma}(t-0)$. Итак, условие теоремы 3.1 проще всего расшифровывается в классе таких траекторий, что $\Omega(\gamma,t)$ отделена от края этой полусферы:

Определение 3.5. *Мы будем говорить, что допустимая траектория $\gamma(t) \in \mathrm{Lip}(o,n) \setminus \{0\}$ является регулярной, если она кусочно гладкая: $\gamma(t) \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n)$, и выполняются следующие условия:*

1. *Для почти всех $x \in \Omega$ таких, что $|x - o| > 1$ выполняется неравенство:*

$$\big\langle x - \gamma(t(\gamma,x)), \dot\gamma(t \pm 0)\big\rangle \geq \alpha > 0, \tag{4}$$

   где α – некоторая фиксированная константа;

2. *Производная $\dot\gamma(t)$ является Липшицевой на каждом своем промежутке непрерывности с одной и той же константой Липшица.*

Условие $|x - o| > 1$ равносильно условию $t(\gamma, x) > 0$. Мы всегда будем предполагать, что мера таких x не равна 0 – иначе задача вероятностного поиска бессмысленна, и точка E не зависимо ни от чего будет найдена в первый же момент времени.

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma(t) \not\equiv 0$ – регулярная траектория и $\widetilde\tau_\psi(\gamma) < +\infty$. Рассмотрим вариацию $h(t) \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n)$: $h(0) = o$ и $h(t)$ – ограничена. Пусть более того $\dot h(t \pm 0) \perp \dot\gamma(t \pm 0)$ при всех $t \geq 0$. Тогда существует двусторонняя производная по Гато*

$$\widetilde\tau_\psi(\gamma)'_\Gamma[h] = -\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}} \int\limits_\Omega \frac{\big\langle x - \gamma(t(\gamma,x)), h(t(\gamma,x))\big\rangle}{\big\langle x - \gamma(t(\gamma,x)), \dot\gamma(t(\gamma,x))\big\rangle} \psi(x)\, dx.$$

Доказательство. Для начала найдем одностороннюю производную по Гато от $\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}}$ по произвольному направлению $h(\cdot) \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n)$, $h(0) = o$: так как $\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}} = \max\limits_{t \geq 0} |\dot\gamma(t \pm 0)| \neq 0$ (иначе $\gamma(t) \equiv o$), то:

$$\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}}{}'_{\Gamma_+}[h] = \sup_{t\in \operatorname{argmax}|\dot\gamma(t\pm 0)|} \frac{\big\langle \dot\gamma(t\pm 0), \dot h(t\pm 0)\big\rangle}{\big\langle \dot\gamma(t\pm 0), \dot\gamma(t\pm 0)\big\rangle}.$$

Так как по условию $\dot h(t\pm 0) \perp \dot\gamma(t\pm 0)$ при любом $t \geq 0$, то $\|\gamma\|_{\mathrm{Lip}}{}'_{\Gamma_+}[h] = 0$.

Теперь найдем производную от $t(\gamma, x)$ по γ при фиксированном x. Поскольку нас интересует производная во всех точках $x \in \Omega$, за исключением быть может множества меры 0, то мы можем считать, что $\gamma(t)$ и $h(t)$ дифференцируемы в $t(\gamma, x)$ (если $t_1, \dots, t_n, \dots$ – их точки не гладкости, то по лемме 3.1 множество $\Omega(\gamma, t_1) \cup \ldots \cup \Omega(\gamma, t_n) \cup \ldots$ имеет меру 0).

Производная $t(\gamma, x)'_{\Gamma_+}$ равна 0 для почти всех $x \in \Omega(\gamma, 0)$. Пусть $t_0 = t(\gamma, x) > 0$. Обозначим $t_1 = t(\gamma + \lambda h, x)$. Тогда t_1 определено для всех достаточно малых λ и $|t_1 - t_0| \to 0$ при любом $x \in \Omega$ равномерно по λ в силу регулярности $\gamma(\cdot)$.

По теореме Лагранжа о среднем значении (см. [7]):

$$\begin{gathered} 0 = |x - \gamma(t_1) - \lambda h(t_1)|^2 - |x - \gamma(t_0)|^2 = \\ \big(|x-\gamma(t_1)|^2 - |x - \gamma(t_0)|^2\big) - 2\lambda\big\langle x - \gamma(t_1), h(t_1)\big\rangle + \lambda^2 |h(t_1)|^2 = \\ -2\big\langle x - \gamma(t), \dot\gamma(t)\big\rangle (t_1 - t_0) - 2\lambda \big\langle x - \gamma(t_1), h(t_1)\big\rangle + \lambda^2 |h(t_1)|^2, \end{gathered}$$

где t лежит между t_0 и t_1. Так как $\big\langle x - \gamma(t), \dot\gamma(t)\big\rangle \geq \frac{1}{2}\alpha > 0$ вблизи t_0, мы получаем, что

$$t_1 - t_0 = -\lambda \frac{\big\langle x - \gamma(t_1), h(t_1)\big\rangle}{\big\langle x - \gamma(t), \dot\gamma(t)\big\rangle} + \lambda^2 \frac{|h(t_1)|^2}{\big\langle x - \gamma(t), \dot\gamma(t)\big\rangle}. \tag{5}$$

Итак, для почти всех $x \in \Omega$ таких, что $t(\gamma, x) > 0$ верно равенство:

$$t(\gamma, x)'_{\Gamma_+}[h] = -\frac{\big\langle x - \gamma(t_0), h(t_0)\big\rangle}{\big\langle x - \gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\big\rangle}.$$

Более того, написанная формула верна и в случае $t(\gamma, x) = 0$, так как $h(0) = o$.

Так как $\gamma(t)$ регулярна, то $\gamma(t)$ и $\dot\gamma(t)$ стремятся к $\gamma(t_0)$ и $\dot\gamma(t_0)$ равномерно по λ на множестве всех точек дифференцируемости $\gamma(t)$. Учитывая ограниченность $h(\cdot)$, из (5) получаем, что существует такое λ_0, что для всех $0 < \lambda < \lambda_0$ дробь $\frac{t_1 - t_0}{\lambda}$ ограничена:

$$\left|\frac{t_1 - t_0}{\lambda}\right| \leq 2\frac{|h(t_0)| + \lambda_0 |h(t_0)|^2}{\alpha} \leq 2\frac{1 + \lambda_0 \sup |h(t)|}{\alpha} \sup |h(t)|$$

То есть для всех x и λ

$$\left|\frac{t(\gamma + \lambda h, x) - t(\gamma, x)}{\lambda}\right| \leq const.$$

Так как $\psi(x)$ интегрируема на Ω, то по теореме Лебега (см. [1]) мы можем перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\left(\int\limits_{\Omega} t(\gamma, x)\psi(x)\, dx\right)'_{\Gamma_+} = -\int_{\Omega} \frac{\big\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), h(t(\gamma, x))\big\rangle}{\big\langle x - \gamma(t(\gamma, x)), \dot\gamma(t(\gamma, x))\big\rangle} \psi(x)\, dx.$$

Получившаяся производная линейна по $h(\cdot)$, значит, существует двусторонняя производная по Гато, что и требовалось.

$\square$

Естественно, применение данной теоремы осмысленно только в случае $n \geq 2$.

Следствие 3.1. *Если $\widehat\gamma(\cdot)$ и $h(\cdot)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и $\widehat\gamma(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{=1}(o, n)$ – оптимальная траектория (минимум функционала $\widetilde\tau_\psi(\cdot)$), то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), h(t(\widehat{\gamma},x))\big\rangle}{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \dot{\widehat{\gamma}}(t(\widehat{\gamma},x))\big\rangle}\psi(x)\,dx = 0.$$

Итак, теперь у нас в распоряжении есть сильное средство по поиску регулярной оптимальной траектории. Рассмотрим семейство простейших вариаций $h_\varepsilon(t)$: зафиксируем некоторый момент времени $t_0 > 0$ и определим $g_\varepsilon(t)$ как иголку на отрезке $[t_0; t_0+\varepsilon]$:

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{, если } t \in [0, t_0]; \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{, если } t \in [t_0; t_0+\varepsilon]; \\ 0 & \text{, если } t \in [t_0+\varepsilon; +\infty). \end{cases}$$

Положим $\dot{h}_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(t)\widehat{\gamma}^\perp(t)$, где $\widehat{\gamma}^\perp(t_0)$ – это произвольный вектор, перпендикулярный $\dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0)$, а $\widehat{\gamma}^\perp(t)$ – его непрерывное продолжение в правую окрестность t_0 такое, что $\widehat{\gamma}^\perp(t) \perp \dot{\widehat{\gamma}}(t)$. Тогда

$$\underline{O}(\varepsilon) \quad + \int\limits_{\{x\in\Omega: t(\widehat{\gamma},x)\geq t_0+\varepsilon\}} \frac{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \widehat{\gamma}^\perp(t_0)\big\rangle}{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \dot{\widehat{\gamma}}(t(\widehat{\gamma},x))\big\rangle}\psi(x)\,dx = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$\int\limits_{\{x\in\Omega: t(\widehat{\gamma},x)\geq t_0\}} \frac{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \widehat{\gamma}^\perp(t_0)\big\rangle}{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \dot{\widehat{\gamma}}(t(\widehat{\gamma},x))\big\rangle}\psi(x)\,dx = 0,$$

или по-другому:

$$\left\langle \widehat{\gamma}^\perp(t_0), \int\limits_{\{x\in\Omega: t(\widehat{\gamma},x)\geq t_0\}} \frac{x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x))}{\big\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \dot{\widehat{\gamma}}(t(\widehat{\gamma},x))\big\rangle}\psi(x)\,dx \right\rangle = 0,$$

Написанное равенство верно для любого направления $\widehat{\gamma}^{\perp}(t_0)$, перпендикулярного $\dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0)$. Аналогичные рассуждения верны и для вектора $\dot{\widehat{\gamma}}(t_0-0)$. Итак:

Лемма 3.2. *Если $\widehat{\gamma}(t)$ – оптимальная регулярная траектория, то в любой момент времени $t_0>0$ вектора*

$$\dot{\widehat{\gamma}}(t_0\pm 0) \text{ и } \int\limits_{\{x\in\Omega: t(\widehat{\gamma},x)\geq t_0\}} \frac{x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x))}{\left\langle x-\widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma},x)), \dot{\widehat{\gamma}}(t(\widehat{\gamma},x))\right\rangle}\psi(x)\,dx$$

параллельны.

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить дифференциальную связь, определяющую оптимальную траекторию:

Теорема 3.3. *Пусть $\widehat{\gamma}(t)$ - оптимальная регулярная траектория. Если вектор-функция*

$$F(t)=\int\limits_{\Omega(\widehat{\gamma},t)} \Big(x-\widehat{\gamma}\big(t(\widehat{\gamma},x)\big)\Big)\psi(x)\,d\omega \tag{6}$$

непрерывна по t на некотором промежутке $[t_1,t_2]$ ($d\omega$ обозначает стандартную форму объема на единичной сфере) и $\int_{t_0}^{+\infty}F(t)\,dt$ не обращается в 0 при $t_0\in[t_1;t_2]$, то $\widehat{\gamma}(t)$ на этом промежутке является натуральной параметризацией некоторой кусочно-гладкой кривой $\gamma(s)$, удовлетворяющей следующей дифференциальной связи:

$$\gamma''(s)=u(s)|\gamma'_s(s)|\int\limits_{\Omega(\gamma,s)} \big(x-\gamma(s(\gamma,x))\big)\psi(x)\,d\omega, \tag{7}$$

где $u(s)=\pm1$ – кусочно-постоянная функция. Более того, $u(s)$ может изменить знак только в левых нулях $F(t)$ (то есть $F(t)=$

0 и $F(t-0) \neq 0$). Точки не гладкости $\gamma(s)$ совпадают с переключениями $u(s)$ и при этом $\dot\gamma(s-0) = -\dot\gamma(s+0)$.

Доказательство. Представим соотношение из леммы 3.2 в наиболее приемлемом виде: введем на множестве $\{x \in \Omega : t(\widehat{\gamma}, x) > 0\}$ новые координаты: $x = x(t, \omega)$, где $t = t(\widehat{\gamma}, x)$ – первый момент времени осмотра точки x, а ω – набор равномерных координат на подмножестве $\Omega(\widehat{\gamma}, t)$ соответствующей единичной полусферы. Набор координат (t, ω) не вырожден, так как множество $\Omega(\gamma, t)$ отделено от края полусферы в силу регулярности $\widehat{\gamma}(t)$.

Если $\widehat{\gamma}(t)$ является оптимальной, то очевидно, что $|\dot{\widehat{\gamma}}(t \pm 0)| = const$ для всех $t > 0$. Так как $\widehat{\gamma} \in \mathrm{Lip}_{=1}(o, n)$, то $|\dot{\widehat{\gamma}}(t \pm 0)| = 1$. Таким образом формы объема связаны следующим образом:

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \;=\; \big\langle x - \widehat{\gamma}(t), \dot{\widehat{\gamma}}(t) \big\rangle dt \wedge d\omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_{n-1},$$

и мы получаем, что

$$\int\limits_{\{x \in \Omega : t(\widehat{\gamma}, x) \geq t_0\}} \frac{x - \widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma}, x))}{\big\langle x - \widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma}, x)), \dot{\widehat{\gamma}}(t(\widehat{\gamma}, x)) \big\rangle} \psi(x)\, dx =$$

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \int\limits_{\Omega(\widehat{\gamma}, t)} \big(x - \widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma}, x))\big) \psi(x)\, dt \wedge d\omega,$$

где для краткости $d\omega = d\omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_{n-1}$ – стандартная форма объема на единичной сфере.

Сменим параметризацию $\gamma(t)$ на $t = t(s)$, где $t(s)$ монотонно возрастает. Тогда $\gamma'_s(s) = \gamma'_t(t(s)) t'(s)$, и $t'(s) = |\gamma'_s(s)|$. Сменой параметризации мы меняем длину вектора $\gamma'_s(s)$, но не его направление, Поэтому всегда можно добиться точного равенства

$$\gamma'(s_0+0) = -u(s_0)\int\limits_{s_0}^{+\infty}\int\limits_{\Omega(\gamma,s)}\big(x-\gamma(s(\gamma,x))\big)|\gamma'_s(s)|\psi(x)\,ds\wedge d\omega, \quad (8)$$

где $u(s)=\pm1$ кусочно постоянная функция равная -1 если векторы в лемме 3.2 сонаправлены и 1 в противном случае. Дифференцируя (8) по s_0 в силу непрерывности $F(t)$ получаем нужное дифференциальное уравнение.

Определим, в каких ситуациях функция $u(s)$ может изменять знак в точке s_0: так как ни $\widehat{\gamma}(t)$ ни $\int\limits_{t_0}^{+\infty}\int\limits_{\Omega(\gamma,t)}\big(x-\widehat{\gamma}(t(\gamma,x))\big)\psi(x)\,dt\wedge d\omega$ не обращаются в 0, то $u(s)$ меняют знак только в точках не гладкости $\widehat{\gamma}(t)$. Это означает, что $\dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0) = -\dot{\widehat{\gamma}}(t_0-0)$, и, значит, в силу регулярности $\widehat{\gamma}(\cdot)$, в течение некоторого времени после t_0 игрок P осмотрит лишь множество меры ноль, то есть $F(t_0+\varepsilon)=0$ для всех малых ε.

$\square$

Замечание 3.1. *В теореме 3.3 знак $u(s)$ выбирается следующим образом: $u(s)=-1$ если векторы в лемме 3.2 сонаправлены, и $u(s)=1$ в противном случае.*

Замечание 3.2. *Пусть $S(\gamma)$ – это момент окончания поиска по траектории $\gamma(s)$. Тогда из формулы (8) следует, что*

$$\lim_{s\to S(\gamma)-0}|\gamma'(s)|=0,$$

где $\gamma(s)$ – это параметризация оптимальной траектории из теоремы 3.3.

Замечание 3.3. *Если каким-то образом удалось построить решение $\gamma(s)$ уравнения (7), то оптимальная траектория $\widehat{\gamma}(t)$ находится достаточно легко: $\widehat{\gamma}(t)$ является натуральной параметризацией кривой $\gamma(s)$.*

4 Вероятностный поиск на сильно выпуклых множествах

Прежде чем приступать к изучению оптимальных траекторий в конкретных случаях, докажем еще несколько важных лемм:

Определение 4.1. *Пусть $\gamma(t)$ – некоторая допустимая траектория. Положим*

$$T(\gamma) = \inf\{t > 0 : \int_{\{x\in\Omega | t(\gamma,x)\le t\}} t(\gamma, x)\psi(x)\, dx = 1\}.$$

То есть $T(\gamma)$ – это момент окончания поиска. Будем считать, что $T(\gamma) = +\infty$, если время поиска бесконечное.

Лемма 4.1. *Пусть $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{=1}(o, n)$ – оптимальная траектория (возможно не регулярная). Предположим что в течении времени $t \in [t_0; t_1]$ (при $t_1 < T(\widehat{\gamma})$) игрок P осмотрел множество меры 0:*

$$\mu\left(\bigcup_{t_0\le t\le t_1} \Omega(\widehat{\gamma}, t)\right) = 0,$$

тогда при $t \in [t_0; t_1]$ траектория $\gamma(t)$ является прямолинейным движением с постоянной скоростью.

Доказательство. Проведем доказательство от противного: если движение по $\widehat{\gamma}(t)$ на $[t_0; t_1]$ не является прямолинейным с постоянной

скоростью 1, то траекторию $\widehat{\gamma}(t)$ можно подправить следующим образом: движение по $\widetilde{\gamma}(t)$ в точности совпадает с движением по $\widehat{\gamma}(t)$, за исключением промежутка $[\widehat{\gamma}(t_0), \widehat{\gamma}(t_1)]$ – на нем движение $\widetilde{\gamma}(t)$ является прямолинейным с постоянной скоростью 1. Из построения следует, что $\|\widetilde{\gamma}\|_{\mathrm{Lip}} = \|\widehat{\gamma}\|_{\mathrm{Lip}} = 1$, $t(\widetilde{\gamma}, x) \leq t(\widehat{\gamma}, x)$, и, более того, если $t(\widehat{\gamma}, x) \geq t_1$, то $t(\widetilde{\gamma}, x) < t(\widehat{\gamma}, x)$. Так как $t_1 < T(\widehat{\gamma})$, получаем, что $\tau_\psi(\widetilde{\gamma}) < \tau_\psi(\widehat{\gamma})$. Противоречие. □

Лемма 4.2. *Пусть $\widehat{\gamma}(t) \in \mathrm{Lip}_{=1}(o, n)$ – оптимальная траектория (возможно не регулярная). Если для некоторого $t_0 \in (0, T(\widehat{\gamma}))$ существует $\dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0) \neq 0$, то найдется $x \in \Omega$ такой, что $t(\widehat{\gamma}, x) > t_0$ и $\left\langle x - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0) \right\rangle > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим два принципиально разных случая: для любого $t_1 > t_0$ за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осматривает множество ненулевой меры; и существует $t_1 > t_0$ такое, что за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осмотрит лишь множество меры 0

Рассмотрим первый случай: пусть $t_1 > t_0$ и $x \in \Omega$ такой, что $t(\widehat{\gamma}, x) > t_0$. Тогда $|x - \widehat{\gamma}(t_1)| = 1$ и $|x - \widehat{\gamma}(t)| > 1$. Значит,

$$0 < |x - \widehat{\gamma}(t_1)|^2 - |x - \widehat{\gamma}(t)|^2 = -\left\langle x - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0) \right\rangle (t_1 - t_0) + \bar{o}(t_1 - t_0)$$

Таким образом $\left\langle x - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0) \right\rangle \geq 0$ если $t_1 - t_0$ достаточно мало. Покажем, что найдутся x такие, что это неравенство превращается в строгое: мера множества точек x в которых достигается точное равенство равна 0, и за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осмотрел множество ненулевой меры.

Перейдем ко второму случаю. Пусть t_1 – максимальный момент времени такой, что за время $t_0 \leq t \leq t_1$ игрок P осмотрел лишь множество меры 0 ($t_1 \neq +\infty$, так как $t_0 < T(\widehat{\gamma})$). Согласно предыдущей лемме, движение от t_0 до t_1 прямолинейно с направлением $\dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0)$, то есть $\widehat{\gamma}(t_1) = \widehat{\gamma}(t_0) + \dot{\widehat{\gamma}}(t_0+0)(t_1 - t_0)$.

Так как t_1 – максимальный, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x \in \Omega$ такой, что $|x - \gamma(t_1)|^2 < 1 + \varepsilon$ и $t(\gamma, x) \geq t_1$. Тогда для $\varepsilon = |\dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)|^2(t_1 - t_0)^2$ получаем

$$1 + |\dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)|^2(t_1 - t_0)^2 > |x - \widehat{\gamma}(t_1)|^2 \geq$$
$$1 - 2\big\langle x - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)\big\rangle(t_1 - t_0) + |\dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)|^2(t_1 - t_0)^2.$$

То есть $\big\langle x - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)\big\rangle > 0$, что и требовалось.

$\square$

Рассмотрим теперь случай сильно выпуклого множество Ω (см. [8]):

Определение 4.2. *Множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ называется сильно выпуклым радиуса R, если оно выпукло и для любых двух точек $x, y \in \Omega$ пересечение всех шаров радиуса R содержащих x и y лежит в Ω.*

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – сильно выпуклое множество с радиусом выпуклости 1 (радиус выпуклости совпадает радиусом области видимости игрока P). В этом случае либо Ω ограничено и его диаметр Ω не больше 2, либо Ω совпадает с $\mathbb{R}^n$. Нас будет интересовать случай ограниченного Ω, так как если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то ни одна траектория не является регулярной (неравенство (4) заведомо нарушается).

Множество Ω всегда замкнуто, в виду того, что Ω - это носитель функции $\psi(\cdot)$: $\Omega = \operatorname{Supp}\psi$.

Лемма 4.3. *Если $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – компактное сильно выпуклое множество с радиусом выпуклости 1, и $\widehat{\gamma}(t)$ – регулярная траектория, то $B_1\big(\widehat{\gamma}(t_0)\big) \cap \Omega \subseteq B_1\big(\widehat{\gamma}(t_1)\big) \cap \Omega$ для любых $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T(\widehat{\gamma})$ ($B_1(x)$ – это единичный шар с центром в точке x).*

Доказательство. Положим

$$t_0 = \sup\Big\{t \geq 0 : B_1\big(\widehat{\gamma}(t_1)\big) \cap \Omega \subseteq B_1\big(\widehat{\gamma}(t_2)\big) \cap \Omega \quad \forall\, t_1 \leq t_2;\ t_1,\ t_2 \in [0;t]\Big\}.$$

Множество в правой части равенства не пусто, так как содержит $t = 0$. Также обязательно найдется $x \in \Omega$ (см. рис. 4), такой, что $\big\langle y - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)\big\rangle \leq 0$ и $|x - \gamma(t_0)| = 1$ (если такого x нет, то окрестность нижней полусферы не лежит в Ω в силу замкнутости Ω, и, значит, t_0 не максимально).

Покажем, что $t_0 \geq T(\widehat{\gamma})$. Предположим противное, тогда согласно лемме 4.2 существует y такой, что $\big\langle y - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)\big\rangle > 0$ и $|x - \widehat{\gamma}(t_0)| > 1$. Тогда в силу сильной выпуклости Ω найдется такая точка $z \in \Omega$, что $\big\langle z - \widehat{\gamma}(t_0), \dot{\widehat{\gamma}}(t_0 + 0)\big\rangle = 0$ и $|z - \widehat{\gamma}(t_0)| = 1$ и условие регулярности (4) нарушается для точек из окрестности точки z (см. рис. 4). $\square$

Следствие 4.1. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\widehat{\gamma}(t)$ из предыдущей леммы, тогда для всех $t \in (0; T(\widehat{\gamma}))$ выполнено соотношение*

$$\Omega(\widehat{\gamma}, t) = \partial B_1\big(\widehat{\gamma}(t)\big) \cap \Omega.$$

Следствие 4.2. *Предположим, что $\rho(o, \Omega) < 1$. Если плотность вероятности $\psi(x)$ непрерывна на Ω, то вектор-функция*

$$F(t) = \int\limits_{\Omega(\widehat{\gamma},t)} \big(x - \widehat{\gamma}(t(\widehat{\gamma}, x))\big)\psi(x)\, d\omega$$

непрерывна при всех $t \in \big(0; T(\widehat{\gamma})\big)$ ($d\omega$ – стандартная мера на единичной сфере S^{n-1}, а $\Omega = \operatorname{Supp}\psi(\cdot)$ и $\widehat{\gamma}(t)$ из леммы 4.3).

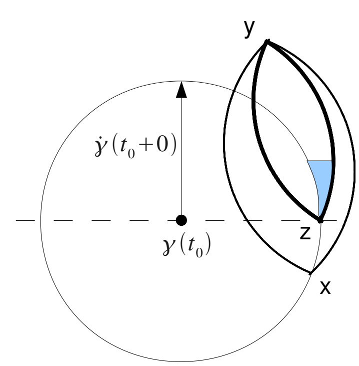

Рис. 4: Иллюстрация к противоречию в лемме 4.3.

Лемма 4.4. *Пусть Ω – это шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса не больше 1, а функция $\psi(x)$ непрерывна на Ω и зависит только от расстояния до центра шара Ω* [8] *или Ω – это плоское, компактное, сильно выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ радиуса не больше 1, а $\psi(x)$ является постоянной функцией на Ω. Если $\rho(o,\Omega) \leq 1$, то ни вектор-функция $F(t_0)$ ни интеграл $\int_{t_0}^{+\infty} F(t)\,dt$ не обращаются в 0 при всех $t_0 \in (0; T(\widehat{\gamma}))$.*

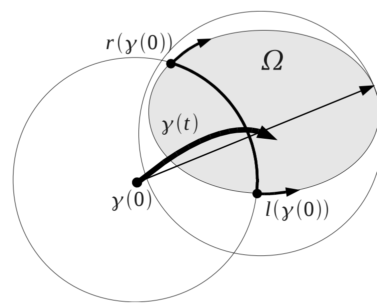

Рис. 5: Поиск на сильно выпуклом множестве.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\rho(o,\Omega) < 1$. Из следствия 4.1 видно, что $\Omega(\widehat{\gamma},t)$ является сегментом единичной сферы S^{n-1} с центром в $\gamma(t)$, а граница $\partial\Omega(\widehat{\gamma},t)$ – это сфера меньшего радиуса размерности $n-2$. Легко видеть, что в обоих случаях (Ω – шар в $\mathbb{R}^n$ или сильно выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$) вектор $F(t)$ в силу симметрии перпендикулярен гиперплоскости, содержащей (n-2)-мерную сферу $\partial\Omega(\widehat{\gamma},t)$ (см. равенство (6)).

Если функция $\psi(x)$ постоянна на своем носителе Ω: $\psi(x) \equiv \psi_0 > 0$, то длина $F(t)$ равна длине отрезка, ограниченного 0-мерной сферой $\partial\Omega(\widehat{\gamma},t)$ умноженной на ψ_0, и, следовательно, вектор $F(t)$ не обращается в 0 при всех $t \in \big(0; T(\widehat{\gamma})\big)$.

Если же Ω – это шар в $\mathbb{R}^n$ и $\psi(x)$ симметрична относительно центра Ω, то $\psi(x) \neq 0$ для почти всех $x \in \Omega(\widehat{\gamma},t)$ (иначе бы в силу непрерывности и симметрии функции $\psi(x)$ относительно центра шара Ω, множество Ω не могло бы быть носителем функции $\psi(x)$). Следовательно, вектор $F(t)$ также не обращается в 0 при всех $t \in \big(0; T(\widehat{\gamma})\big)$.

Займемся теперь интегралом $\int_{t_0}^{+\infty} F(t)\,dt$: покажем, что существует такой вектор v, что

[8] То есть $\psi(x) = \psi(\rho(x,O))$, где O – это центр шара Ω.

$$\big\langle v, F(t)\big\rangle > 0 \text{ для всех } t \in (0; T(\widehat{\gamma})).$$

Пусть Q – произвольная точка из $\Omega(\widehat{\gamma}, T(\widehat{\gamma}))$ [9]. Тогда вектор с началом в $\gamma(0)$ и концом в Q при любом $t \in (0; T(\widehat{\gamma}))$ пересекает сектор сферы $\Omega(\widehat{\gamma}, t)$, ограниченный сферой $\partial\Omega(\widehat{\gamma}, t)$ (см. рис. 5). В качестве v можно выбрать этот вектор.

Итак, $\int_{t_0}^{+\infty} F(t)\,dt \neq 0$ при всех $t_0 \in \big(0; T(\widehat{\gamma})\big)$, так как

$$\left\langle v, \int_{t_0}^{+\infty} F(t)\,dt \right\rangle > 0.$$

Если же $\rho(o, \Omega) = 1$, то описанное выше рассуждение проходит для всех $\Delta t \in (0; T(\widehat{\gamma}))$, то есть $F(t_0) \neq 0$ и $\int_{t_0}^{+\infty} F(t)\,dt \neq 0$ для всех $t_0 \in (\Delta t, T(\widehat{\gamma}))$. В силу произвольности Δt получаем искомое.

□

Следствие 4.3. *В условиях предыдущей леммы функция $u(s)$ из теоремы 3.3 является постоянной. Определим знак $u(s)$: очевидно, что $\widehat{\gamma}(T(\widehat{\gamma}) - \Delta t)$ сонаправлена $\int_{T(\widehat{\gamma})-\Delta t}^{T(\widehat{\gamma})} F(t)\,dt$. Значит, (см. замечание 3.1),*

$$u(s) \equiv -1, \textit{ для всех } s \in \Big(s(0); s\big(T(\widehat{\gamma})\big)\Big).$$

Теорема 4.1. *Пусть $\Omega = \operatorname{Supp}\psi(\cdot)$ – это шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса не больше 1 и функция $\psi(x)$ плотности вероятности возможного расположения точки E непрерывна на Ω и зависит только от расстояния до центра сферы Ω: $\psi(x) = \psi\big(\rho(x, O(\Omega))\big)$ ($O(\Omega)$ обозначает центр шара Ω). Тогда оптимальная траектория $\widehat{\gamma}(t)$ представляет собой прямолинейное движение с постоянной скоростью в центр шара Ω.*

[9] На самом деле, если радиус выпуклости Ω строго меньше 1, то множество $\Omega(\widehat{\gamma}, T(\widehat{\gamma}))$ состоит из одной точки.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\rho(o,\Omega) > 1$. Тогда по лемме 4.1 игрок P должен двигаться прямолинейно с постоянной скоростью в одну из точек x таких, что $\rho(x,\Omega) = 1$. Математическое ожидание времени поиска одинаково при старте из всех таких точек x, что $\rho(x,\Omega) = 1$. Значит, игрок P движется в ближайшую такую точку, то есть точно к центру шара Ω.

Пусть теперь $\rho(o,\Omega) \leq 1$. В этом случае мы можем применить теорему 3.3 (согласно следствию 4.2 и лемме 4.4 наша ситуация удовлетворяет условиям теоремы). Итак $\widehat{\gamma}(t)$ – это натуральная параметризация кривой $\gamma(s)$ такой, что

$$\gamma''(s) = \Lambda\big(\gamma(s)\big)|\gamma'(s)|\Big(\gamma(s) - O(\Omega)\Big),$$

где $O(\Omega)$ – центр Ω, а $\Lambda(\cdot)$ – некоторая положительно значная функция, $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ (см. равенства (6) и (7)). Таким образом, ускорение $\gamma''(s)$ всегда направлено из центра сферы $O(\Omega)$. Следовательно, модуль составляющей скорости $\gamma'(s)$, перпендикулярной радиус-вектору $O(\Omega)\gamma(s)$, не изменяется с течением времени, но согласно замечанию 3.2 имеем

$$\lim_{s \to S(\gamma)-0} |\dot{\gamma}(s)| = 0.$$

Значит, скорость $\gamma'(s)$ всегда направлена в центр сферы $O(\Omega)$. Что и требовалось. $\square$

Построим множество Ω^*, двойственное к множеству Ω: Ω^* состоит из таких x, что для всех $y \in \Omega$ расстояние $\rho(x,y)$ не превосходит 1:

$$\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x,y) \leq 1 \ \forall y \in \Omega\}$$

Из любой точки множества Ω^* игрок P видbт все точки множества Ω.

Теорема 4.2. *Пусть функция $\psi(x) \equiv \psi_0 > 0$ постоянна на $\Omega = \operatorname{Supp}\psi(\cdot)$, и Ω – это плоское сильно выпуклое множество радиуса не больше 1. Определим для любой точки $x \notin \Omega^*$ такой, что $\rho(x, \Omega) < 1$ две функции: $l(x)$ и $r(x)$ – это точки пересечения границы $\partial\Omega$ с единичной окружностью с центром в x [10]. Если $\rho(o, \Omega) < 1$, то оптимальная траектория $\widehat{\gamma}(t)$ является натуральной параметризацией кривой $\gamma(s)$, удовлетворяющей следующему однородному дифференциальному уравнению:*

$$\gamma''(s) = -|\gamma'(s)|\ \Lambda\big(\gamma(s)\big)\ V\big(\gamma(s)\big), \tag{9}$$

где коэффициент $\Lambda(P)$ задается следующей формулой:

$$\Lambda(P) = \psi_0 \sqrt{\frac{1 - \big\langle r(P) - P; l(P) - P\big\rangle}{1 + \big\langle r(P) - P; l(P) - P\big\rangle}} \geq 0,$$

а вектор $V(P)$ – следующей:

$$V(P) = r(P) + l(P) - 2P.$$

Доказательство. Согласно следствию 4.2 и лемме 4.4 рассматриваемая задача оптимального вероятностного поиска удовлетворяет условиям теоремы 3.3 о параметризации оптимальной кривой. Применим ее.

Для начала найдем $F(t)$ из теоремы 3.3: так как $\Omega(\widehat{\gamma}, t)$ – это дуга окружности с центром в $\widehat{\gamma}(t)$, то по следствию 4.1 точки $l(x)$ и $r(x)$ – концы этой дуги. Таким образом,

$$F(t) = \psi_0 \frac{|r(\widehat{\gamma}(t)) - l(\widehat{\gamma}(t))|}{|\frac{r(\widehat{\gamma}(t)) + l(\widehat{\gamma}(t))}{2} - \widehat{\gamma}(t)|} \left(\frac{r(\widehat{\gamma}(t)) + l(\widehat{\gamma}(t))}{2} - \widehat{\gamma}(t)\right). \tag{10}$$

[10] Так как Ω – сильно выпуклое множество радиуса не больше 1, то его пересечение с любой окружностью радиуса 1 либо пусто, либо является дугой этой окружности. Соответственно, $l(x)$ и $r(x)$ – концы этой дуги. Более того в силу симметрии уравнения 9 неважно, какой из концов дуги обозначить за $l(x)$, а какой за $r(x)$.

То есть $F(t)$ – это вектор длины $|r(\widehat{\gamma},(t)) - l(\widehat{\gamma},(t))|$, параллельный вектору $r(\widehat{\gamma}(t))+l(\widehat{\gamma}(t))-2\widehat{\gamma}(t)$ (формула (10) следует напрямую из определения $F(t)$ в теореме 3.3).

Преобразуя функцию $F(t)$, по теореме 3.3 получаем искомое уравнение. $\square$

Для точек $x \in \Omega^*$ функции $l(x)$ и $r(x)$ не определены. Однако если в какой-то момент времени $\gamma(s) \in \Omega^*$, то поиск окончен.

Разберемся с начальными условиями: написанное уравнение (9) является уравнением второго порядка. Первое начальное условие очевидно: $\gamma(0) = o$. Со вторым несколько хуже. Его можно найти из следующих соображений:

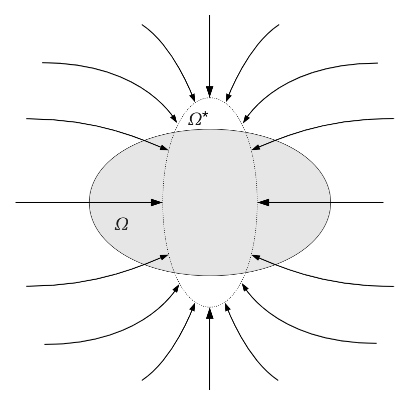

Рис. 6: Схематичный изображение оптимального поиска на эллипсе.

1. Согласно замечанию 3.2 имеем

$$\lim_{s\to S(\gamma)-0} |\dot{\gamma}(s)| = 0.$$

2. Если радиус выпуклости Ω строго меньше 1, то множество $\Omega(\widehat{\gamma}, T(\widehat{\gamma}))$ состоит из единственной точки $Q \in \partial\Omega$. Предположим, что граница $\partial\Omega$ гладкая в окрестности точки Q. Тогда граница $\partial\Omega^*$ гладкая в окрестности точки $Q^* = \widehat{\gamma}(T(\widehat{\gamma}))$, и касательные к границам в этих точках параллельны друг другу и перпендикулярны вектору Q^*Q. Очевидно, что вектор $\widehat{\gamma}(t)$ при $t \to T(\widehat{\gamma}) - 0$ стремится к вектору, параллельному Q^*Q, и, следовательно, перпендикулярному касательной к границе $\partial\Omega^*$ в точке Q^*.

К сожалению уравнение (9) получается довольно сложным даже для простейшего случая, когда Ω – эллипс. Однако, легко построить качественную топологию решений этого уравнения (см. рис. 6). Также оно без особого труда поддается прближенному численному решению на ЭВМ.

5 Теорема существования

Введем на пространстве $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$ секвенциальную топологию (см. [9, 10]):

Определение 5.1. *Мы будем говорить, что последовательность траекторий* $\gamma_n(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$ *сходится к некоторой* $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$ *если на любом конечном промежутке* $[0;\alpha]$ *траектории* $\gamma_n(\cdot)$ *сходятся к* $\widehat{\gamma}(\cdot)$ *равномерно.*

Хаусдорфовость получившегося топологического пространства следует из очевидной единственности предела.

Лемма 5.1. *Пространство* $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$ *компактно относительно выбранной топологии.*

Доказательство. Любая траектория $\gamma(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$ на любом конечном отрезке $[0,\alpha]$ ввиду Липшивости ограничена по модулю константой α:

$$\forall t \in [0;\alpha] \quad |\gamma(t) - o| \leq |\alpha - 0| = \alpha.$$

Рассмотрим произвольную последовательность траекторий $\gamma_n(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o,n)$. Докажем, что из нее можно выбрать сходящуюся.

Все $\gamma_n(\cdot)$ равностепенно непрерывны на промежутке $[0;\infty)$. Согласно теореме Арцела (см. [1]) из любой равномерно ограниченной последовательности равностепенно непрерывных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Значит из любой последовательности $\gamma_n(\cdot)$ можно выбрать подпоследовательность $\gamma_n^1(\cdot)$

равномерно сходящуюся на промежутке $[0,1]$. Из нее в свою очередь можно выбрать подпоследовательность $\gamma_n^2(\cdot)$, сходящуюся на промежутке $[0,2]$, и так далее. Подпоследовательность $\gamma_n^k(\cdot)$ сходится на $[0;k]$.

Рассмотрим теперь диагональную последовательность $\gamma_n^n(\cdot)$. Она сходится равномерно на любом конечном отрезке к некоторой непрерывной кривой $\widehat{\gamma}(\cdot)$. Очевидно, что $\widehat{\gamma}(0) = o$. Покажем Липшицевость $\widehat{\gamma}(\cdot)$: возьмем любые t_1 и t_2 и рассмотрим произвольный конечный отрезок $[0;\alpha]$ их содержащий. Тогда из равномерной сходимости получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\,\exists N > 0 :\ \forall n > N\ \forall t \in [0;\alpha] \quad |\gamma_n(t) - \widehat{\gamma}(t)| < \varepsilon.$$

Тогда независимо от $n > N$ получаем:

$$|\widehat{\gamma}(t_2) - \widehat{\gamma}(t_1)| \leq |(\widehat{\gamma}(t_2) - \gamma_n(t_2)| + |\gamma_n(t_2) - \gamma_n(t_1)| + |\gamma_n(t_1) - \widehat{\gamma}(t_1))|.$$

Отсюда вытекает нужная нам оценка, верная для всех $\varepsilon > 0$:

$$|\widehat{\gamma}(t_2) - \widehat{\gamma}(t_1)| < 2\varepsilon + |t_2 - t_1|.$$

То есть ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем: $|\widehat{\gamma}(t_2) - \widehat{\gamma}(t_1)| \leq |t_2 - t_1|$. Что и требовалось.

$\square$

Пусть τ_ψ^{inf} – это инфимум функционала $\tau_\psi(\cdot)$ на всем множестве $S(\Omega, o)$ допустимых траекторий:

$$\tau_\psi^{inf} = \inf_{\gamma(\cdot) \in S(\Omega,o)} \tau_\psi(\gamma(\cdot)).$$

Возможно, что $\tau_\psi^{inf} = +\infty$. В этом случае задача оптимизации не интересна, так как любая допустимая траектория является оптимальной. Однако, инфимум τ_ψ^{inf} достаточно часто конечен – если, например, множество $\Omega = \operatorname{Supp}\psi(\cdot)$ ограничено в $\mathbb{R}^n$, или если $\psi(x)$ достаточно быстро стремится к 0 при $x \to \infty$. Поэтому мы будем считать, что $\tau_\psi^{inf} < \infty$ (проверяется этот факт даже в случае бесконечной меры Ω просто: достаточно построить хотя бы одну допустимую траекторию $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ с конечным математическим ожиданием времени поиска: $\tau_\psi(\widetilde{\gamma}(\cdot)) < \infty$).

Рассмотрим теперь все множество допустимых траекторий $S(\Omega, o)$. Вложение $S(\Omega, o) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ индуцирует на $S(\Omega, o)$ естественную топологию. Поскольку нашей конечной целью является доказательство теоремы существования оптимальной траектории в классе $S(\Omega, o)$, то мы будем рассматривать не все множество допустимых траекторий, а лишь его подмножество траекторий с не слишком большим математическим ожиданием времени поиска:

Определение 5.2. *Множество $S^T(\Omega, o)$ – это множество всех допустимых $\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o)$ таких, что $\tau_\psi(\gamma(\cdot))$ не превосходит $T \in \mathbb{R}$:*

$$S^T(\Omega, o) = \{\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o) : \tau_\psi(\gamma(\cdot)) \leq T\}$$

Лемма 5.2. *Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o)$. Если $\tau_\psi(\gamma_n(\cdot))$ при любом n не превосходит некоторой заданной константы T: $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$, то для почти всех $x \in \Omega$ функции $t(\gamma_n, x)$ определены при всех n и ограничены.*

Доказательство. Для каждого фиксированного n для почти всех $x \in \Omega$ определена функция $t(\gamma_n, x)$. Поскольку счетное объединением множеств меры 0 есть снова множество меры 0 [11], то для почти всех $x \in \Omega$ одновременно для всех n определены функции $t(\gamma_n, x)$.

[11]Здесь, например, мы использовали аксиому счетного последовательного выбора DC.

Покажем, что мера множества таких $x \in \Omega$, при которых последовательность $t(\gamma_n, x)$ неограниченна, равна 0:

$$A = \Big\{x \in \Omega : \forall M \ \exists N \in \mathbb{N} : \quad t(\gamma_N, x) > M\Big\}.$$

Рассмотрим множества

$$A_M = \Big\{x \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N} : \quad t(\gamma_N, x) > M\Big\}$$

Множества A_M построены так, что

$$A = \bigcap_{M=1}^{\infty} A_M$$

Оценим интегралы функции $\psi(x)$ на множествах A_M. Для любых $M > 0$ выполняются неравенства:

$$T \geq \tau_\psi(\gamma_N(\cdot)) \geq \int\limits_{A_M} t_N(x)\psi(x)\,dx \geq M \int\limits_{A_M} \psi(x)\,dx$$

Значит [12],

$$\int\limits_{A_M} \psi(x)\,dx \leq \frac{T}{M}.$$

Так как $\Omega \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_M \supseteq \ldots$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [1]), получаем:

$$\int_A \psi(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_{A_M} \psi(x)\,dx = 0 \tag{11}$$

Теперь воспользуемся не отрицательностью $\psi(x)$ и тем, что Ω есть носитель функции $\psi(x)$. Положим

[12] По существу написанное неравенство является неравенством Чебышева (см. [1]).

$$B_0 = \{x \in \Omega : \psi(x) \geq 1\} \text{ и } \forall n \geq 1 \; B_n = \Big\{x \in \Omega : \frac{1}{n+1} \leq \psi(x) < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Тогда $\bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n = \Omega$. Но согласно (11) для любого n мера $\mu(A \cap B_n) = 0$, и, естественно, $A \subseteq \Omega$. В силу σ-аддитивности меры Лебега:

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap B_n) = 0.$$

Что и требовалось. $\square$

Следствие 5.1. *Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$. Тогда для почти всех $x \in \Omega$ существует нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} t(\gamma_n, x) < \infty$.*

Лемма 5.3. *Пусть последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ сходится к некоторой траектории $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ в описанной выше секвенциальной топологии пространства $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$. Тогда $\widehat{\gamma}(\cdot)$ принадлежит $S(\Omega, o)$, то есть $t(\widehat{\gamma}, x)$ определена для почти всех $x \in \Omega$. Более того, для почти всех $x \in \Omega$ выполнено неравенство:*

$$t(\widehat{\gamma}, x) \leq \varliminf_{n\to\infty} t(\gamma_n, x).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$, сходящуюся к некоторой $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$. По лемме 5.2 для почти всех $x \in \Omega$ одновременно определены все функции $t(\gamma_n, x)$. Более того для почти всех $x \in \Omega$ последовательность $\{t(\gamma_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Значит, при любом фиксированном $x \in \Omega$ (за исключением быть может множества

меры 0) из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к нижнему пределу:

$$\lim_{k\to\infty} t(\gamma_{n_k}, x) = \varliminf_{n\to\infty} t(\gamma_n, x) = t_0(x) < \infty$$

Покажем, что, двигаясь по траектории $\widehat{\gamma}(\cdot)$, игрок P заведомо осмотрит точку x в момент времени $t_0(x)$. Ввиду Липшивости всех траекторий $\gamma_n(\cdot)$ имеем:

$$\lim_{k\to\infty} |\gamma_{n_k}\big(t(\gamma_{n_k}, x)\big) - \gamma_{n_k}\big(t_0(x)\big)| \le \lim_{k\to\infty} |t(\gamma_{n_k}, x) - t_0(x)| = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} |\widehat{\gamma}\big(t_0(x)\big) - x| \le \ & |\widehat{\gamma}\big(t_0(x)\big) - \gamma_{n_k}\big(t_0(x)\big)| + \\ & |\gamma_{n_k}\big(t_0(x)\big) - \gamma_{n_k}\left(t(\gamma_{n_k}, x)\right)| + \\ & |\gamma_{n_k}\big(t(\gamma_{n_k}, x)\big) - x|, \end{aligned}$$

и, естественно, $|\gamma_{n_k}(t(\gamma_{n_k}, x)) - x| = 1$, получаем, что $|\widehat{\gamma}(t_0(x)) - x| \le 1 + o(k)$ при $k \to +\infty$. То есть

$$|\widehat{\gamma}(t_0(x)) - x| \le 1.$$

Следовательно, двигаясь по $\widehat{\gamma}(\cdot)$, игрок P заведомо осмотрит точку x в момент времени $t_0(x)$ и, значит, в первый раз он осмотрит точку x не позже чем в момент $t_0(x)$, то есть $t(\widehat{\gamma}, \cdot)$ определена для почти всех $x \in \Omega$, и, следовательно, траектория $\widehat{\gamma}(\cdot)$ допустима: $\widehat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$. Более того,

$$t(\widehat{\gamma}, x) \le t_0(x) = \varliminf_{n\to\infty} t(\gamma_n, x).$$

Что и требовалось. $\square$

Таким образом мы доказали, что множество $S^T(\Omega, o)$ слабо компактно в $S(\Omega, o)$.

Для доказательства теоремы существования, нам, по большому счету, осталось лишь доказать полунепрерывность снизу функционала $\tau_\psi(\gamma(\cdot))$. Для этого нам потребуется простое обобщение теоремы Фату (см. [1])[13]:

Теорема 5.1. *Рассмотрим последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}$. Если для почти всех $x \in \Omega$ существует нижний предел*

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

и $\int\limits_\Omega f_n(x)\,dx \le K$ *для всех* n, *тогда существует* $\int\limits_\Omega f(x)\,dx \le K$.

Доказательство. [14] Положим

$$\varphi_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x);$$

Далее, $0 \le \varphi_n(x) \le f_n(x)$ поэтому $\varphi_n(\cdot)$ интегрируемы, и

$$0 \le \int_\Omega \varphi_n(x)\,dx \le \int_\Omega f_n(x)\,dx \le K;$$

наконец,

$$0 \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \cdots \le \varphi_n(x) \le \cdots$$

и

[13] Автору не известна литература, в которой было бы приведено доказательство этого естественного обобщения теоремы Фату, и, поэтому, ее полное доказательство приведено в тексте.

[14] Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы Фату, приведенное в [1].

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

почти всюду. Поэтому, применяя терему Б.Леви (см. [1]) к $\{\varphi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ получаем требуемый результат. $\square$

Следствие 5.2. *Рассмотрим последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}$ и некоторую неотрицательную функцию $f(x)$. Если для почти всех $x \in \Omega$ существует нижний предел $f_n(x)$, мажорирующий $f(x)$:*

$$f(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

и $\int\limits_{\Omega} f_n(x)\,dx \leq K$ для всех n, то $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$ конечен и тоже не превосходит K.

Теперь мы готовы доказать полунепрерывность функционала $\tau_\psi(\cdot)$ по $\gamma(\cdot)$ (естественно, мы считаем, что $\tau_\psi^{\inf}$ конечен):

Лемма 5.4. *Функционал $\tau_\psi(\cdot)$ полунепрерывен снизу на пространстве допустимых траекторий $S(\Omega, o)$ относительно секвенциальной топологии индуцированной вложением $S(\Omega, o) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ (см. определение 5.1).*

Доказательство. Рассмотрим последовательность допустимых траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o)$ сходящуюся к некоторой траектории $\widehat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$ и будем считать, что

$$\lim_{n\to\infty} \tau_\psi(\gamma_n(\cdot)) = T.$$

Докажем, что $\tau_\psi(\widehat{\gamma}(\cdot))$ конечен и не превосходит T. Мы можем считать, что $\tau_\psi(\gamma_n(\cdot)) \leq T + \varepsilon$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$

– этого всегда можно добиться путем выкидывания конечного числа начальных членов последовательности $\gamma_n(\cdot)$. Возьмем функции $t(\gamma_n, x)$ и $t(\widehat{\gamma}, x)$ и построим по ним функции

$$f_n(x) = t(\gamma_n, x)\psi(x), \text{ и } f(x) = t(\widehat{\gamma}, x)\psi(x)$$

Согласно лемме 5.3 эти функции удовлетворяют условию следствия 5.2. Значит

$$\tau_\psi(\widehat{\gamma}) = \int_\Omega t(\widehat{\gamma}, x)\psi(x)\,dx \leq T + \varepsilon.$$

Поскольку это неравенство выполняется для всех $\varepsilon > 0$, то $\tau_\psi(\widehat{\gamma}) \leq T$. $\square$

Лемма 5.5. *Множество $S^T(\Omega, o)$ компактно относительно секвенциальной топологии, индуцированной вложениями $S^T(\Omega, o) \subseteq S(\Omega, o) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ [15].*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\gamma_n(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$. Так как $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$ – компакт (лемма 5.1), то возможно выбрать подпоследовательность $\gamma_{n_k}(\cdot)$, сходящуюся к некоторой $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$. Согласно лемме 5.3 $\widehat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$. Так как функционал $\tau_\psi(\cdot)$ полунепрерывен снизу на $S(\Omega, o)$ (лемма 5.4), то $\tau_\psi(\widehat{\gamma}(\cdot)) \leq T$, и, следовательно, $\widehat{\gamma}(\cdot) \in S^T(\Omega, o)$ $\square$

Теорема 5.2. *Если $\tau_\psi^{inf} < \infty$ (например, Ω ограничено в $\mathbb{R}^n$), то в поставленной задаче поиска с неполной информацией существует допустимая оптимальная траектория $\widehat{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o)$.*

[15] Само же множество допустимых траекторий $S(\Omega, o)$ не является компактным: легко привести пример последовательности траекторий $\gamma_n(\cdot) \in S(\Omega, o)$, сходящихся к некоторой $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n)$, но при этом $\tau_\psi(\gamma_n)$ стремится к $+\infty$ и $\widehat{\gamma}(\cdot) \notin S(\Omega, n)$.

Доказательство. Рассмотрим множество $S^{2\tau_\psi^{inf}}(\Omega, o)$. Оно компактно по предыдущей лемме, а функционал $\tau_\psi(\cdot)$ полунепрерывен снизу (лемма 5.4). Значит $\tau_\psi(\cdot)$ достигает минимума. Что и требовалось. $\square$

Ну и наконец покажем, что в общем случае единственность отсутствует. Если функция $\psi(x)$ зависит только от расстояния между точками x и o и не зависит от направления вектора $\overrightarrow{ox}$:

$$\psi(x) = \psi(\rho(x, o)),$$

то при повороте оптимальной стратегии с помощью любого ортонормированного линейного преобразования $A \in O_n(\mathbb{R})$ пространства $\mathbb{R}^n$ мы получим стратегию с тем математическим ожиданием времени поиска, и, значит, также оптимальную.

Важно также отметить, что мы доказали теорему существования для класса допустимых траекторий с наперед неограниченным временем поиска, так как $S(\Omega, o) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}(0, n) \subseteq \mathrm{Lip}_{\leq 1}([0; +\infty) \to \mathbb{R}^n)$. То есть априори время поиска на траектории (в том числе на оптимальной) может быть бесконечным (хотя математическое ожидание времени поиска может быть конечным).

В случае ограниченной области Ω интересен так же случай допустимых траекторий в пространстве $\mathrm{Lip}_{\leq 1}([0; T] \to \mathbb{R}^n)$.

Определение 5.3. *Множеством $S(\Omega, o, T) = S(\Omega, o) \cap \mathrm{Lip}_{\leq 1}([0; T] \to \mathbb{R}^n)$ мы будем называть множество всех допустимых траекторий таких, что вероятность успешного окончания поиска в момент времени T равна 1. Естественно, $S(\Omega, o, +\infty) = S(\Omega, o)$.*

Лемма 5.6. *Ограниченность (с точностью до множества меры 0) области Ω равносильно тому, что существует $T \geq 0$, при котором $S(\Omega, o, T)$ не пусто.*

Доказательство. Рассмотрим куб $[-R; R]^n$, где $R > 0$ - некоторое фиксированное число. Нетрудно предъявить траекторию $\gamma_R(\cdot)$ осматривающую всю внутренность этого куба за конечное время $T \geq 0$. Если область Ω ограничена (с точностью до множества меры 0), то ее всегда можно вложить в достаточно большой куб $[-R; R]^n$, и, значит, множество $S(\Omega, o, T)$ будет не пусто и содержать $\gamma_R(\cdot)$.

Если же для некоторого $T \geq 0$ множество $S(\Omega, o, T)$ не пусто и $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in S(\Omega, o, n)$, то для любого $t \in [0; T]$ имеем $\rho(\widetilde{\gamma}(t), o) \leq T$, но для почти всех $x \in \Omega$ существует $t \in [0; T]$ такой, что $\rho(x, \gamma(t)) \leq 1$. То есть $\rho(x, o) \leq T + 1$. Это и означает ограниченность области Ω. $\square$

Теорема 5.3. *Если область Ω ограничена (с точностью до множества меры 0), то в любом непустом классе $S(\Omega, o, T)$ существует оптимальная траектория $\widehat{\gamma}_T(\cdot)$:*

$$\tau_\psi(\widehat{\gamma}_T) = \inf_{\gamma(\cdot) \in S(\Omega, o, n)} \tau_\psi(\gamma)$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n, T) = \{\gamma(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{\leq 1}([0; T] \to \mathbb{R}^n) : \gamma(0) = o\}.$$

По теореме Арцела (см. [1]) множество $\mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n, T)$ компактно (см. доказательство леммы 5.1). При этом $S(\Omega, o, T) = S^T(\Omega, o) \cap \mathrm{Lip}_{\leq 1}(o, n, T)$, то есть $S(\Omega, o, T)$ есть пересечение двух компактов и, следовательно, тоже компактно. Значит, полунепрерывная функция $\tau_\psi(\cdot)$ достигает на нем минимума. Что и требовалось. $\square$

Автор благодарен Зеликину М.И. за постонное внимание к работе и множество ценных ценных советов.

Список литературы

[1] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.*, "Элементы теории функций и функциональный анализ", Москва, Наука, 1972 г.

[2] *Зеликин М.И.*, "Об одной дифференциальной игре с неполной информацией", Доклады Академии Наук СССР, том 202, №5, 1972 г.

[3] *Натансон И.П.*, "Конструктивная теория функций", Москва - Ленинград, ТехТеорЛит, 1949 г.

[4] *Solovay Robert M.*, "A model of set-theory, in which every set of reals is Lebesgue measurable", Annals of Mathematics, 92, No. I (July 1970) 1-56.

[5] *Локуциевский Л. В., Зеликин М.И, Усачев Р.А.*, "Вихревые особенности оптимальных стратегий при начале движение в задачах поиска на n-мерных римановых многообразиях", Современная математика и ее приложения, РУДН, том 58, 2008 г.

[6] *Локуциевский Л.В.*, "Вихревые особенности оптимальных стратегий при начале движения в задачах поиска на n-мерных многообразиях", Доклады Академии Наук, том 417, N 3, Ноябрь 2007.

[7] *Фихтенгольц Г.М.*, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", издание пятое стереотипное, Москва, государственное издательство физико-математической литературы, 1962 г.

[8] *Половинкин Е.С., Балашов М.В.*, "Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа", Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004 г.

[9] *Franklin S. P.*, "Spaces in Which Sequences Suffice", Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

[10] *Franklin S. P.*, "Spaces in Which Sequences Suffice II", Fund. Math. 61 (1967), 51-56.